Esercizi sull'equazione della parabola

1) Scrivi l'equazione della parabola di fuoco $F\left(0, \frac{1}{6}\right)$, direttrice $d: y = -\frac{1}{6}$ ed asse di simmetria parallelo all'asse y.

Il vertice si trova a metà tra fuoco e direttrice, quindi il vertice è nell'origine, $V(0,0)$. La distanza fuoco-vertice è $f = \frac{1}{6}$, da cui si ricava $a = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$.

L'equazione della parabola è $y = \frac{3}{2}x^2$.

2) Determina l'equazione della parabola con il vertice nell'origine e il fuoco in $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$.

L'equazione è del tipo $y = ax^2$.

$a = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{12}} = 3$, quindi l'equazione è $y = 3x^2$.

3) Calcola l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco della parabola di equazione $y = \frac{1}{8}x^2$.

Il vertice è nell'origine, $f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{8}} = 2$, quindi $F(0,2)$ e $d: y = -2$.

4) Trova l'equazione della parabola con vertice nell'origine, asse di simmetria coincidente con l'asse y e passante per il punto $P(2,8)$.

L'equazione è del tipo $y = ax^2$.
Sostituendo le coordinate di P si ottiene:
$8 = a \cdot 2^2$, $a = 2$, quindi l'equazione è $y = 2x^2$.

5) Scrivi l'equazione della parabola di vertice $V(1,-3)$, asse parallelo all'asse y e coefficiente $a = -2$.

Si può scrivere come equazione della parabola $y = -2x^2$, traslata del vettore $V(1,-3)$: $y + 3 = -2(x-1)^2$, da cui, semplificando, $y + 3 = -2x^2 + 4x - 2$,
$y = -2x^2 + 4x - 5$

In alternativa si può risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a = -2 \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -3 = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = -3 + 2 - 4 = -5 \end{cases} \qquad y = -2x^2 + 4x - 5$$

6) Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per la seguente terna di punti:

$A(-2,0)$, $B(1,-6)$, $C(4,6)$

$$\begin{cases} 0 = 4a - 2b + c \\ -6 = a + b + c \\ 6 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2b - 4a \\ -6 = a + b + 2b - 4a \\ 6 = 16a + 4b + 2b - 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ -6 = 3b - 3a \\ 6 = 12a + 6b \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2b - 4a \\ b - a = -2 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2b - 4a \\ b = a - 2 \\ 2a + a - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ b = a - 2 \\ 3a = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -2 - 4 = -6 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \implies y = x^2 - x - 6$$

7) Scrivi l'equazione della parabola con l'asse parallelo all'asse x passante per la seguente terna di punti:

$A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(3,3)$

La parabola ha equazione del tipo

$x = ay^2 + by + c$.

Sostituendo le coordinate dei punti

si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} c=0 \\ -1=a+b \\ 3=9a+3b \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-1-a \\ 3=9a+3(-1-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ b=-1-a \\ 3=9a-3-3a \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-1-a \\ 6a=6 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-1-a \\ a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

l'equazione della parabola è: $x=y^2-2y$.

8) Scrivi l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, avente vertice nel punto $V(1,0)$ e passante per $P(3,8)$.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=1 \\ 0=a+b+c \\ 8=9a+3b+c \end{cases} \quad \begin{cases} b=-2a \\ a-2a+c=0 \\ 8=9a+3b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2a \\ c=a \\ 8=9a+3(-2a)+a \end{cases} \quad \begin{cases} b=-2a \\ c=a \\ 4a=8 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4 \\ c=2 \\ a=2 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y=2x^2-4x+2$.

9) Determina la posizione reciproca della parabola $\gamma: x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y$ e della retta $r: y-3=0$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y \\ y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 3 \end{cases}$$

Sono secanti ed hanno il solo punto punto di intersezione $P\left(\frac{3}{4}, 3\right)$.

10) Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 5x + 1$ considera il fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante; fra queste determina la retta tangente alla parabola data.

Il fascio di rette ha equazione $y = x + k$.
Mettendo a sistema l'equazione del fascio con l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 1 \\ y = x + k \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di secondo grado: $-x^2 + 5x + 1 = x + k$,
$x^2 - 4x + k - 1 = 0$

La condizione di tangenza $\Delta = 0$ diventa
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(k-1) = 16 - 4k + 4 = 20 - 4k = 0$

da cui $k = 5$ e $y = x + 5$ è l'equazione della retta tangente cercata.

11) Calcola le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

I punti di intersezione con l'asse x si ottengono come soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(0,0), \quad B(2,0)$$

Per trovare le tangenti alla parabola nei punti A e B uso le formule di sdoppiamento:

A) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$, $A(0,0)$

$$\frac{y+0}{2} = \frac{1}{2}x \cdot 0 - \frac{x+0}{2}, \quad y = -x, \quad x + y = 0$$

B) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$, $B(2,0)$

$$\frac{y+0}{2} = \frac{1}{2}x \cdot 2 - \frac{x+2}{2}, \quad y = 2x - x - 2,$$

$$y = x - 2, \quad x - y - 2 = 0$$